

# İstatistik I

3. Hafta

28 Şubat 2022

3. Merkezi Eğilim Ölçüleri

[www.umitsarp.com](http://www.umitsarp.com)

**Ümit SARP, [umit.sarp@ikcu.edu.tr](mailto:umit.sarp@ikcu.edu.tr)**

# Giriş

- Merkezi Eğilim Ölçüleri
  - Analitik (duyarlı) ortalamalar
  - Analitik olmayan (duyarsız) ortalamalar
  - Aritmetik ortalama
  - Geometrik ortalama
  - Tepe Değer (Mod)
  - Ortanca (Medyan)



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Merkezi eğilim ölçüleri bir seri hakkında bilgi edinmemizi ve çeşitli kıyaslamalar yapmamıza olanak sağlayan ölçütlerdir. Verilerin daha çok hangi değerlere eğilimli olduklarını bulmak için merkezi eğilim ölçülerini kullanırız. Bu ölçüler **analitik olan (duyarlı)** ve **analitik olmayan (duyarsız)** ortalamalardır. Analitik ortalamalar; aritmetik ortalama, tartılı ortalama, kareli ortalama, harmonik ortalama ve geometrik ortalama. Analitik olmayan ortalamalar ise mod ve medyandır [3].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Analitik (duyarlı) ortalamalar

Analitik ortalamalara “duyarlı” denmesinin nedeni; **veri kümesindeki tüm gözlem birimlerini hesaba katmasıdır**. Bu hesaplama yöntemi, özellikle uç değerler (uç değer bir diğer ifade ile sapan değer, serideki değerlerden çok farklı olan değerlerdir) söz konusu olduğunda ortalama-yı uç değerlere doğru çekerek doğru tahmin yapmayı zorlaştırır. Bu tip durumlarda ya uç değerler hesaplamadan dışlanır, ya da analitik olmayan ortalama türlerinden faydalanılır. Bu duruma en güzel örnek, bir sınıfın ortalama notunu hesaplarken en yüksek ve en düşük değerlerin dışlanarak hesaba alınmamasıdır [3].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Analitik ortalamalar;

- aritmetik ortalama\*
- tartılı ortalama
- geometrik ortalama
- kareli ortalama
- harmonik ortalama



## Analitik olmayan (duyarsız) ortalama

Analitik olmayan ortalamalara “duyarsız” denmesinin nedeni, **özellikle uç değerlerin olduğu durumlarda bu gibi değerleri göz ardı etmesi, tüm gözlemleri hesaba almaması ve sıralamaya dayanmasından kaynaklanmaktadır.** Bu sıralamanın ne anlama geldiğini ilerideki sayfalarda göreceğiz [3].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Analitik olmayan (duyarsız) ortalama;

- Tepe Değer (Mod)
- Ortanca (Medyan)



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Ortalma hesaplanacak seride gözlem değerlerinin hepsi eşit önemde ise "Basit Aritmetik Ortalama" farklı önemde ise "Tartılı Aritmetik Ortalama" söz konusudur.

## Basit Aritmetik Ortalama

Ortalamlar içinde en yaygın biçimde kullanılan ortalma biçimidir. Ortalama denilince ilk akla gelen ortalma türüdür. Aritmetik ortalma; gözlem değerlerinin cebirsel toplamının gözlem sayısına bölünmesi ile hesaplanan ortalamadır.

Örnekleme  $\bar{X}$ , kitlede (evrende)  $\mu$  ile gösterilir [2].





# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Basit Aritmetik Ortalama

Ana kitlenin tamamı  $N$  hacimli ve sonlu olduğunda bu kitlenin sahip olduğu veriler  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$  ile ifade edilir. Bu durumda hesaplanacak aritmetik ortalama evrenin aritmetik ortalamasıdır ve  $\mu$  ile gösterilir. Evrenin aritmetik ortalaması;

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

formülü ile hesaplanır [2].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Basit Aritmetik Ortalama

Burada  $\sum_{i=1}^N X_i$ : seri değerlerinin cebirsel toplamını,

$N$ : gözlem sayısını (evrenin hacmini) gösterir.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Basit Aritmetik Ortalama

Aritmetik ortalama  $n$ -hacimlik **örneklem**den elde edilen  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  veri kümesi için hesaplanacak olursa,  $\bar{X}$  (  $X$ -ortalama veya  $X$ -bar diye okunur) simgesi ile gösterilir, örneklemin aritmetik ortalaması olarak adlandırılır. Örneklemin aritmetik ortalaması;

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

formülü ile hesaplanır [2].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

En çok bilinen ve en sık kullanılan ortalamadır.

Sıfır içeren serilerde harmonik ortalama hesaplanamaz, geometrik ortalama hesaplanabilir ama anlamsız olur.

Seride negatif değer var ise, geometrik ortalama hesaplanamaz.

Ancak aritmetik ortalama her türlü veri seti için hesaplanabilir ve tek bir tanedir.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Aritmetik ortalama cebirsel işlemlere elverişli olması, kolay hesaplanması ve anlaşılması sebebiyle de yaygın kullanım alanına sahiptir. Nitekim ortalama dendiğinde akla sadece aritmetik ortalama gelmektedir.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Cebirsel işlemlere elverişli olması, aritmetik ortalamanın pek çok istatistik analiz yönteminin temelinde veya içeriğinde yer almasına sebep olmuştur.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Aritmetik ortalama, artış miktarı sabit aritmetik dizi özelliği gösteren serilerde daha temsili nitelik taşımaktadır. Başka bir deyişle, aritmetik ortalama bu tür serileri daha iyi temsil etmektedir.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Aritmetik ortalamamanın kullanılabilmesi için verinin en az aralık ölçeğinde toplanması gerekir. Nominal ve ordinal ölçekte toplanmış veriler için aritmetik ortalama kullanılması uygun değildir.





# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Örnek:

Bir işyerinde çalışan 8 kişinin aylık kazançları aşağıda verilmiştir. Bu işçilerin aylık ortalama kazançlarını hesaplayalım.

$$\begin{array}{r} X_i \\ X_1 = 640 \\ X_2 = 800 \\ X_3 = 860 \\ X_4 = 980 \\ X_5 = 1120 \\ X_6 = 1160 \\ X_7 = 1560 \\ X_8 = 1680 \\ \hline \sum_{i=1}^8 X_i = 8800 \end{array}$$

# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

İş yerinde çalışan toplam 8 kişinin aylık kazanç değişkeni incelenmiş ve tam sayım uygulanmıştır. Evrenin hacmi  $N=8$  işçidir ve gözlem değerleri  $\mu = \sum_{i=1}^8 X_i = 8800$  olduğundan evrenin aritmetik ortalaması:

$$\mu = \frac{\sum X}{N} = \frac{8800}{8} = 1100$$

olarak bulunur.

Hesaplanan aylık ortalama kazanç temsilidir.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Bir önceki örneği tekrar düşünelim bu kez dört kişiden oluşan bir örneklem olarak örneklemin aritmetik ortalamasını bulalım.

$$\begin{array}{r} X_i \\ 640 \\ 860 \\ 980 \\ \underline{1160} \\ \sum_{i=1}^4 X_i = 3640 \end{array}$$



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Çalışan işçilerden dört işçinin aylık kazançları gözlenmiştir. Bu nedenle  $n = 4$ 'dir. Örneklemin aritmetik ortalaması:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{3640}{4} = 910$$

olarak bulunur.

Hesaplanan aylık ortalama kazanç temsilidir.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Sıra sizde, Örnek:

Bir köyde yaşayan aileler arasında seçilen 6 ailenin aylık gelirleri aşağıdaki gibi olsun. Bu ailelerin aylık gelir ortalaması nedir?

$X_i$   
200  
300  
400  
500  
600  
8000

Toplamlarını bulalım;



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Sıra sizde, Örnek:

Toplam;

$X_i$
200
300
400
500
600
<u>8000</u>
10000



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Sıra sizde, Örnek:

Toplam;

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

- Neden  $\bar{X}$  kullandık;  $\mu$  kullanmadık?!
- $n$  değeri kaçtır söylebilir misiniz?



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Sıra sizde, Örnek:

Toplam;

$$X = \frac{\sum_{i=1}^6 X_i}{6} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{6} = \frac{10000}{6} = 1666,67$$





# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Sıra sizde, Örnek:

Sonuç olarak;

Hesaplanan ortalama değer, beşinci ve altıncı gözlem değerleri arasında yer alır. Gözlemlerin merkezinde değildir.

Bu sonuca göre bu özellikte uç değerler içeren seriler için aritmetik ortalama uygun bir method değildir. Uç değer içeren seriler için uygun methodlar önümüzdeki haftalarda anlatılacaktır.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Frekans Serilerinde Aritmetik Ortalama

Frekans serisi şeklinde düzenlenen serilerin aritmetik ortalaması, gözlem değerlerinin frekanslarla çarpımları toplamının frekanslar toplamına oranı olarak tanımlanır. Frekans Serilerinde Aritmetik Ortalama;

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \times f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

formülü ile hesaplanır [2].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Bir işletmenin kargo ile gönderdiği kolilerin dağılımı aşağıda verilmiştir. Kolilerin ağırlıklarının aritmetik ortlaması nedir?

$X_j$	$f_j$	$X_j \times f_j$
10	1	$10 \times 1 = 10$
20	2	$20 \times 2 = 40$
30	4	$30 \times 4 = 120$
40	2	$40 \times 2 = 80$
50	1	$50 \times 1 = 50$
	10	300



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i \times f_i}{\sum_{i=1}^{10} f_i} = \frac{300}{10} = 30$$

Dikkat edersek düzgün artan teorik bir seri olduğu için ortalamanın tam ortayı ifade ettiğini görebiliriz.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Sınıflanmış Frekans Serilerinde Aritmetik Ortalama

Sınıflanmış frekans serisi şeklinde düzenlenen serilerin aritmetik ortalaması, önce frekans serisine dönüştürülür ardından frekans serisi için kullanılan aritmetik ortalama formülü kullanılır.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki sınıflanmış frekans serisini düşünelim.

<u>Gruplar</u>	<u><math>f_i</math></u>	<u><math>X_i</math></u>	<u><math>X_i \times f_i</math></u>
100 – 200	7	150	1050
200 – 300	18	250	4500
300 – 400	25 →→→→→→→	350	8750
400 – 500	30	450	13500
500 – 600	<u>20</u>	550	<u>11000</u>
	100		38800

Dikkat ederseniz gruplarda yer alan verilerin orta noktaları kullanılarak dönüştürülmüştür. **Sizce sebebi nedir?**



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Tartılı Aritmetik Ortalama

Bir istatistik serisindeki bazı gözlem değerlerinin önem derecesi farklılık gösterebilir. Bu önem derecesinin hesaba katılmasına tartılı aritmetik ortalama denir.  $t_j$  i'ninci gözlem değerini gösterir. Tartılı Aritmetik Ortalama;

$$\bar{X}_t = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \times t_i}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

formülü ile hesaplanır [2].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Örnek:

Kredili sistemde öğrenim gören bir coğrafya bölümü öğrencisinin almış olduğu dersler, derslerin kredi değerleri (tartı) ve öğrencinin başarı puanları aşağıda verilmiştir. Öğrencinin ortalama başarı puanı nedir?

<u>Ders</u>	<u>Başarı Notu</u>	<u>Kredi Değeri (tartı)</u>
Çevre ve Ekoloji	2 (CC)	3
TDE	4 (AA)	4
ATA	3 (BB)	3
İstatistik	1 (DD)	2
Bilim Felsefesi	4 (AA)	4





# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

$X_i$	$t_i$	$X_i \times t_i$
2	3	6
4	4	16
3	3	9
1	2	2
<u>4</u>	<u>4</u>	<u>16</u>
14	16	49



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Basit aritmetik ortalama;

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{14}{5} = 2,8$$

Tartılı aritmetik ortalama;

$$\bar{X}_t = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \times t_i}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{49}{16} = 3,06$$



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Geometrik Ortalama

Gözlem değerleri çarpımının gözlem sayısına eşit derecede kökü alınarak hesaplanan ortalmadır. Geometrik Ortalama;

$$GO = \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n}$$

formülü ile hesaplanır [2].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aynı bölgede bulunan dört kömür madenindeki rezervler 2001 yılından bugüne kadar sırayla 3,2,4 ve 6 kat (misli) artış göstermiştir. Buna göre GO kaçtır?

$$GO = \sqrt[4]{3 \times 2 \times 4 \times 6} = \sqrt[4]{144} = (144)^{1/4} = 3,46$$



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Kareli Ortalama

Gözlem değerleri karelerinin aritmetik ortalamasının kareköküne eşit olan ortalamadır. Sıfır değerli ya da negatif işaretli değişkenler olduğunda hesaplanamaz. Kareli Ortalama;

$$KO = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n}}$$

formülü ile hesaplanır [2].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Örnek:

Merkeze olan birim cinsinden belirlendiği bir harita örneğinde negatif değerler batıyı pozitif değerler doğu göstermektedir. Buna göre merkeze uzaklıkları  $-3, -2, 1, 3, 3$  olan noktaların kareli ortalaması nedir?

$X_i$	$X_i^2$
-3	9
-2	4
1	1
3	9
3	9

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow KO = \sqrt{\frac{32}{6}} = 2,53$

Bu dizi için kareli ortalama uygun değildir. Çünkü dizide negatif terimler vardır.

# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Harmonik Ortalama

Oransal olarak belirtilebilen değişkenlerin ortalamalarının hesaplanmasında harmonik ortalama kullanılır. Sıfır değerli ya da negatif işaretli değişkenler olduğunda hesaplanamaz. Harmonik Ortalama;

$$HO = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

formülü ile hesaplanır [2].



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki veriler için harmonik ortalmayı hesaplayalım?

$X_i$	$1/X_i$
4	0,25
5	0,2
7	0,14
8	0,12
16	0,06

→→→→→→  $HO = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} = \frac{5}{0,77} = 6,49$





# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Analitik olmayan (duyarsız) ortalamalar;

## Tepe Değer (Mod)

Küçükten büyüğe doğru sıralanmış gözlem serisinde en fazla tekrarlanan (frekansı en çok olan) verisine **tepe değeri** veya **mod** ismi verilir [2].

Mod, verilerin en çok tekrar eden değer etrafında toplandığını ifade eden bir ölçüdür. Veri grubunu betimlemede, tüm verilerden ziyade en çok tekrar eden verinin kullanılmasından dolayı mod, diğer merkezi eğilim ölçülerine kıyasla veri hakkında **en az bilgi veren** ölçüdür. Hiçbir aritmetik işlem gerektirmez.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki veriler için mod değerini bulalım?

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 8, 8, 15, 45, 72

Cevap?



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki veriler için mod değerini bulalım?

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 8, 8, 15, 45, 72

Cevap=4



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Mod, duyarsız ortalamalar içinde en temsili ortalamadır. Hesabının kolay ve anlaşılır olması sebebiyle duyarsız bir ortalama kullanılması gerekiyorsa tercih edilebilecek bir ortalamadır.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Mod, seride yer alan bütün birimleri dikkate almaksızın hesaplanır. Nitekim en çok tekrar eden değer olarak tanımladığımız modun değerinin ne olacağı üzerinde frekansı daha az olan diğer gözlem değerlerinin hiçbir etkisi ve katkısı bulunmamaktadır. Bu özelliği sebebiyle mod, seride yer alan aşırı küçük ya da aşırı büyük değerlerden etkilenmemesi nedeniyle en temsili ortalama olma özelliği kazanır. Ancak öte yandan, seride yer alan tüm gözlem değerlerinden hareketle hesaplanmaması modu, cebirsel işlemler açısından elverişsiz kılar ve daha ileri istatistiksel analizler açısından uygun bir ortalama olmamasına yol açar.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Dolayısıyla mod, bir seriyi en iyi temsil eden ortalama olarak, amaç sadece bir seriyi özetlemek veya seriyi tek bir değer ile ifade etmek olduğunda rahatlıkla kullanılabilir bir ortalama olma özelliği taşır. Fakat, amaç seriye yönelik bir takım istatistiksel analizler yapmaksa o takdirde mod yetersiz bir ortalama olacaktır.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Mod, nicel vasıflara uygulanabilirliği yanında nitel vasıflara da uygulanabilen bir özellik taşır. Nicel, yani sayısal verilere yönelik örnekleri bu başlık altında gördük. Nitel vasıflara yönelik olarak da örneğin, bir toplulukta kadın ve erkek kişi sayısının ortalaması hesaplanmak istendiğinde, ya da eğitim düzeyleri açısından insanlar tasnif edildiğinde en yüksek frekansı belirlemek suretiyle modu tespit etmek mümkündür.



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

## Ortanca (Medyan)

Basit seri özelliği gereği verilerin küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe sıralandığı seridir. Böyle bir seride sıralamanın tam ortasında yer alan değer medyandır.

Basit seride medyanın hangi sırada yer alan değer olduğunu belirlemek üzere aşağıdaki basit formül kullanılmaktadır:

$$\text{Medyanın Sıra Değeri} = \frac{n + 1}{2}$$





# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki veriler için medyan değerini bulalım?

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 8, 8, 15, 45, 72

Cevap?



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki veriler için medyan değerini bulalım?

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 8, 8, 15, 45, 72

Cevap= 4



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki veriler için medyan değerini bulalım?

1, 1, 1, 2, 2, 7, 8, 15, 45, 50, 60, 65, 72

Cevap?



# Merkezi Eğilim Ölçüleri

Örnek:

Aşağıdaki veriler için medyan değerini bulalım?

1, 1, 1, 2, 2, 7, 8, 15, 45, 50, 60, 65, 72

Cevap= 7



# Ödev

- 1- Aşağıda bir sınıftaki öğrencilerin aldıkları notların dağılımı mevcuttur. Sınıfın ortalama başarısı nedir?

Sınıflar	Öğrenci Sayısı
0 – 20	10
20 – 40	15
40 – 60	20
60 – 80	5
80 – 100	2



# Ödev

- 2- Bir öğrencinin vizeden aldığı not 50 ve finalden aldığı not 52 'dir. Bu sınıfta geçme notu 60 ise öğrenci ilgili dersten geçebilir mi? (Vize ağırlığı %30)



# Ödev

- 3- 13, 13, 12, 19, 15, 2, 17, 12, 10, 10, 4, 5, 10, 13, 19 değerlerini, bir de sıklık serisi oluşturarak bu serilerde aritmetik ortalama, kareli ortalama, geometrik ortalama, mod ve medyan değerlerini hesaplayarak bu değerler arasındaki sıralamayı belirtin?



## 4. Hafta: Merkezi Dağılıma Ölçüleri

İpucu : Standart Sapma





## Kaynaklar I

- [1] K. Mert Çubukçu,  
*"Planlamada ve Coğrafyada Temel İstatistik ve Mekansal İstatistik"*,  
Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eği. Dan. Tic. Ltd. Şti., (2015).
- [2] A. Özmen, F. Er, M. Atlas, E. Şıklar,  
*"İstatistik (AÖF)"*,  
Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, (2012).
- [3] L. İşbilen Yücel,  
*"İstatistik Maliye Uzaktan Eğitim"*,  
İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi Ders Notu.
- [4] Ö. Serper,  
*"Uygulamalı İstatistik 1"*,  
Bursa: Ezgi Kitapevi, (2004).



## Kaynaklar II

- [5] Murat Komisyon,  
*"İstatistik"*,  
Murat Açıköğretim Yayınları, (2004).
- [6] N. Gürsakal, A. Oğuzlar,  
*"Betimsel İstatistik"*,  
Dora Yayıncılık, (2019).
- [7] Y. Baykul, C. O. Güzeller,  
*"Sosyal Bilimler için İstatistik Uygulamaları"*,  
Ankara: Pegem Akademi, (2014).

